ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM QUANG DŨNG

VỀ PHƯƠNG PHÁP LẶP TÌM ĐIỂM BẤT ĐỘNG CỦA ÁNH XẠ KHÔNG GIÃN TRONG KHÔNG GIAN BANACH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

---------------- ----------------

PHẠM QUANG DŨNG

VỀ PHƯƠNG PHÁP LẶP TÌM ĐIỂM BẤT ĐỘNG CỦA ÁNH XẠ KHÔNG GIÃN TRONG KHÔNG GIAN BANACH

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số : 8 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. Trần Xuân Quý

THÁI NGUYÊN - 2019

Mục lục

Mở đầu

Bài toán tìm điểm bất động của ánh xạ đã và đang là một chủ đề thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học trong và ngoài nước.

Một trong những hướng nghiên cứu về bài toán điểm bất động là xây dựng phương pháp tìm (xấp xỉ) điểm bất động của ánh xạ trong không gian Hilbert hoặc không gian Banach. Nhiều bài toán liên quan tới phương pháp xấp xỉ này đã được đặt ra và giải quyết cho từng lớp ánh xạ khác nhau, chẳng hạn lớp ánh xạ co, lớp ánh xạ không giãn,... Với luận văn tốt nghiệp thạc sĩ, tôi lựa chọn một phần trong bài toán xấp xỉ điểm bất động cho lớp ánh xạ không giãn trong không gian Banach. Dưới sự hướng dẫn của TS. Trần Xuân Quý, tôi chọn đề tài luận văn: "Về phương pháp lặp tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn trong không gian Banach". Nội dung luận văn được trình bày trong hai chương, cụ thể như sau:

Chương 1: Trình bày về không gian Banach lồi đều, lồi chặt và bài toán tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn trong không gian Banach.

Chương 2: Trình bày một số phương pháp xấp xỉ điểm bất động của ánh xạ không giãn trong không gian Banach cùng các định lý hội tụ yếu, hội tụ mạnh của các phương pháp.

Trong quá trình học tập và nghiên cứu tại Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, em luôn nhận được sự quan tâm giúp đỡ và động viên của các thầy cô trong Ban Giám hiệu, phòng Đào tạo, Khoa Toán –Tin. Với bản luận văn này, em mong muốn được góp một phần nhỏ công sức của mình vào việc gìn giữ và phát huy vẻ đẹp, sự hấp dẫn cho những định lý toán học vốn dĩ đã rất đẹp. Đây cũng là một cơ hội cho em gửi lời tri ân tới tập thể các thầy cô giảng viên của trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên nói chung và Khoa Toán – Tin nói riêng, đã truyền thụ cho em nhiều kiến thức khoa học quý báu trong thời gian em được là học viên của trường.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu trường THPT Thanh Thủy, Phú Thọ cùng toàn thể các anh chị em đồng nghiệp đã tạo điều kiện tốt nhất cho tác giả trong thời gian đi học Cao học; cảm ơn các anh chị em học viên lớp Cao học Toán K11 và bạn bè đồng nghiệp đã trao đổi, động viên và khích lệ tác giả trong quá trình học tập và làm luận văn tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.

Đặc biệt em xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới giáo viên hướng dẫn, TS. Trần Xuân Quý đã luôn quan tâm ân cần chỉ bảo, động viên khích lệ, giúp đỡ tận tình và góp ý sâu sắc cho em trong suốt quá trình học tập cũng như thực hiện đề tài. Chặng đường vừa qua sẽ là những kỉ niệm đáng nhớ và đầy ý nghĩa đối với các anh chị em học viên lớp K11 nói chung và với bản thân em nói riêng. Dấu ấn ấy hiển nhiên không thể thiếu sự hỗ trợ, sẻ chia đầy yêu thương của cha mẹ hai bên và các anh chị em con cháu trong gia đình. Xin chân thành cảm ơn tất cả những người thân yêu đã giúp đỡ, đồng hành cùng em trên chặng đường vừa qua. Một lần nữa, em xin trân trọng cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày 22 tháng 4 năm 2019

Học viên

Phạm Quang Dũng

Chương 1

Không gian Banach và bài toán điểm bất động

Chương này trình bày một số tính chất hình học không gian Banach và bài toán điểm bất động trong không gian Banach. Kiến thức của chương được tổng hợp từ các tài liệu [1], [2] và [4].

1.1 Không gian Banach

1.1.1 Không gian Banach lồi đều

Cho X là không gian Banach và $x_0 \in X$ cho trước. Ký hiệu $S_r(x_0)$ mặt cầu tâm x_0 bán kính $r > 0$,

$$S_r(x_0) := \{x \in X : ||x - x_0|| = r\}.$$

Định nghĩa 1.1.1. Không gian Banach X được gọi là lồi đều nếu $\epsilon \in (0, 2]$ bất kỳ, tồn tại $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sao cho nếu $x, y \in X$ với $||x|| = 1, ||y|| = 1$ và $||x - y|| \geq \epsilon$, thì $\left|\left|\frac{1}{2}(x + y)\right|\right| \leq 1 - \delta$.

Kết quả dưới đây là một ví dụ về không gian lồi đều.

Định lý 1.1.2. *Không gian $L_p[a, b]$ với $1 < p < \infty$ là không gian lồi đều.*

Định lý 1.1.3. *Giả sử X là không gian Banach lồi đều. Khi đó với bất kỳ $d > 0$, $\epsilon > 0$ và các véc tơ tùy ý $x, y \in X$ với $||x|| \leq d, ||y|| \leq d, ||x - y|| \geq \epsilon$,* *tồn tại* $\delta > 0$ *sao cho*

$$\left|\left|\frac{1}{2}(x+y)\right|\right| \leq \left[1-\delta\left(\frac{\epsilon}{d}\right)\right]d.$$

Chứng minh. Với bất kỳ $x, y \in X$, xét $z_1 = \dfrac{x}{d}, z_2 = \dfrac{y}{d}$, và tập $\bar{\epsilon} = \dfrac{\epsilon}{d}$. Hiển nhiên $\bar{\epsilon} > 0$. Hơn nữa, $||z_1|| \leq 1, ||z_2|| \leq 1$ và $||z_1 - z_2|| = \dfrac{1}{d}\,||x-y|| \geq \dfrac{\epsilon}{d} = \bar{\epsilon}$. Từ tính lồi đều, ta có $\delta = \delta\left(\dfrac{\epsilon}{d}\right) > 0$,

$$\left|\left|\frac{1}{2}(z_1+z_2)\right|\right| 1-\delta(\bar{\epsilon}),$$

nghĩa là

$$\left|\left|\frac{1}{2d}(x+y)\right|\right| \leq 1-\delta\left(\frac{\epsilon}{d}\right),$$

suy ra

$$\left|\left|\frac{1}{2}(x+y) \leq \left[1-\delta\left(\frac{\epsilon}{d}\right)\right]d.\right.\right.$$

Ta có điều phải chứng minh □

Mệnh đề 1.1.4. *Cho* X *là không gian Banach lồi đều và giả sử* $\alpha \in (0,1)$, $\epsilon > 0$. *Khi đó với bất kỳ* $d > 0$, *nếu* $x, y \in X$ *thỏa mãn* $||x|| \leq d$, $||y|| \leq d$, $||x-y|| \geq \epsilon$, *thì tồn tại* $\delta = \delta\left(\dfrac{\epsilon}{d}\right) > 0$ *sao cho*

$$||\alpha x + (1-\alpha)|| \leq \left[1 - 2\delta\left(\frac{\epsilon}{d}\right)\min\{\alpha, 1-\alpha\}\right]d.$$

1.1.2 Không gian Banach lồi chặt

Định nghĩa 1.1.5. Không gian Banach X được gọi là lồi chặt nếu với mọi $x, y \in X$, $x = y, ||x|| = ||y|| = 1$, ta có $||\lambda x + (1-\lambda)y|| < 1\ \forall \lambda \in (0,1)$.

Định lý 1.1.6. *Mọi không gian Banach lồi đều là không gian lồi chặt.*

Định lý 1.1.6 chỉ ra một lớp không gian Banach lồi chặt. Tuy nhiên, không phải mọi không gian Banach đều lồi chặt. Dưới đây là một vài ví dụ về không gian Banach là lồi chặt nhưng ko lồi đều.

Ví dụ 1.1.7. Cho trước $\mu > 0$ và xét $C[0,1]$ với chuẩn $||.||_\mu$ xác định như sau,

$$||x||_\mu := ||x||_0 + \mu\bigg(\int_0^1 x^2(t)dt\bigg)^{\frac{1}{2}}$$

với $||.||_0$ là chuẩn sup. Khi đó

$$||x||_0 \leq ||x||_\mu(1+\mu)||x||_0, \quad x \in C[0,1],$$

và hai chuẩn này tương đương, $||.||_\mu$ gần $||.||_0$ với μ bé. Tuy nhiên, $(C[0,1], ||.||_0)$ không lồi đều, trong khi với bất kỳ $\mu > 0, (C[0,1], ||.||_\mu)$ lồi đều. Mặt khác với bất kỳ $\epsilon \in (0,2]$ tồn tại $x, y \in C[0,1]$ với $||x||_\mu = ||y||_\mu = 1, ||x-y|| = \epsilon$, và $\left|\left|\dfrac{x+y}{2}\right|\right|$ tùy ý gần 1. Vì vậy $(C[0,1], ||.||_\mu)$ không lồi đều.

Ví dụ 1.1.8. Xét μ_0 và $c_0 = c_0(\mathbb{N})$ với chuẩn $||.||_\mu$ xác định với $x = \{x_n\} \in c_0$ như sau

$$||x||_\mu := ||x||_{c_0} + \mu\Bigg(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{x_i}{i}\right)^2\Bigg)^{\dfrac{1}{2}}$$

trong đó $||.||_{c_0}$ là chuẩn thông thường. Như trong ví dụ trên, $(c_0, ||.||_\mu)$ với $\mu > 0$ lồi chặt nhưng không lồi đều, trong khi c_0 với chuẩn thông thường không lồi chặt.

Tiếp theo trình bày về hàm được gọi là modul của tính lồi của không gian định chuẩn X (ký hiệu là $\delta_X : (0,2] \to [0,1]$) và một số tính chất của hàm này

Mệnh đề 1.1.9. (a) *Với mọi không gian định chuẩn, hàm* $\dfrac{\delta_X(\epsilon)}{\epsilon}$ *không giảm trên* $(0,2]$.

(b) *Hàm modulus của tính lồi của không gian định chuẩn là hàm liên tục và lồi.*

(c) *Trong không gian lồi đều X, hàm modulus của tính lồi của không gian định chuẩn δ_X, là hàm tăng thực sự.*

Trong mục này trình bày các đặc trưng của không gian lồi đều.

Định lý 1.1.10. *Không gian Banach X lồi đều khi và chỉ khi $\delta_X(\epsilon) > 0$ với mọi $\epsilon \in (0,2]$.*

Hệ quả 1.1.11. *Trong không gian Banach lồi đều X, hàm modul của tính lồi là hàm tăng chặt.*

Định lý 1.1.12. *Nếu X là không gian Banach lồi đều thì X là không gian phản xạ.*

Định nghĩa 1.1.13.

1. Chuẩn của không gian Banach X được gọi là khả vi Gâteaux nếu với mỗi $y \in S_X$ thì giới hạn
$$\lim_{t\to 0} \frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t} \tag{1.1}$$
tồn tại với $x \in S_X$, ký hiệu là $\langle y, \triangledown \|x\| \rangle$. Khi đó $\triangledown \|x\|$ được gọi là đạo hàm Gâteaux của chuẩn.

2. Chuẩn của X được gọi là khả vi Gâteaux đều nếu với mỗi $y \in S_X$, giới hạn (1.1) đạt được đều với mọi $x \in S_X$.

3. Chuẩn của X được gọi là khả vi Fréchet nếu với mỗi $x \in S_X$, giới hạn (1.1) tồn tại đều với mọi $y \in S_X$.

4. Chuẩn của X được gọi là khả vi Fréchet đều nếu giới hạn (1.1) tồn tại đều với mọi $x, y \in S_X$.

1.2 Bài toán điểm bất động

1.2.1 Ánh xạ không giãn

Ký hiệu 2^X là tập tất cả các tập con của X.

Định nghĩa 1.2.1. Ánh xạ $J^s : X \to 2^{X^*}$, $s > 1$ (nói chung là đa trị) xác định bởi
$$J^s(x) = \left\{ x^* \in X^* : \langle x^*, x \rangle = \|x^*\| \|x\|, \|x^*\| = \|x\|^{s-1} \right\} \quad x \in X,$$
được gọi là ánh xạ đối ngẫu tổng quát của không gian Banach X. Khi $s = 2$, ánh xạ J^2 được ký hiệu là J và được gọi là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc của X.

Ký hiệu ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc đơn trị là j.

Ví dụ 1.2.2. Trong không gian Hilbert H, ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc là ánh xạ đơn vị I.

Tính đơn trị của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc có mối liên hệ với tính khả vi của chuẩn của không gian Banach như khẳng định trong các định lý sau đây.

Định lý 1.2.3. *Cho X là không gian Banach với ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc $J : X \to 2^{X^*}$. Khi đó các khẳng định sau là tương đương:*

(i) X là không gian trơn;

(ii) J là đơn trị;

(iii) Chuẩn của X là khả vi Gâteaux với $\bigtriangledown\|x\| = \|x\|^{-1}Jx$.

Định lý 1.2.4. *Giả sử X là không gian định chuẩn thực, và ánh xạ $J_p : X \longrightarrow 2^{X^*}, 1 < p < \infty$, là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc. Khi đó với bất kỳ $x, y \in X$, ta có bất đẳng thức sau*

$$||x+y||^p \leq ||x||^p + p\langle y, j_p(x+y)\rangle \tag{1.2}$$

với mọi $j_p(x+y) \in J_p(x+y)$. Đặc biệt nếu $p = 2$ thì

$$||x+y||^2 \leq ||x||^2 + 2\langle y, j_(x+y)\rangle \tag{1.3}$$

với mọi $j(x+y) \in J(x+y)$

Định nghĩa 1.2.5. Cho C là tập con khác rỗng của không gian Banach E.

(i) Ánh xạ $T : C \to E$ được gọi là ánh xạ L-liên tục Lipschitz nếu tồn tại hằng số $L \geq 0$ sao cho

$$\|Tx - Ty\| \leq L\|x - y\| \quad \forall x, y \in C. \tag{1.4}$$

(ii) Trong (1.4), nếu $L \in [0, 1)$ thì T được gọi là ánh xạ co; nếu $L = 1$ thì T được gọi là ánh xạ không giãn.

Mọi ánh xạ không giãn, với tập các điểm bất động khác rỗng là tựa không giãn.

Định nghĩa 1.2.6. Giả sử K là tập con của không gian tuyến tính định chuẩn X. Xét $T : K \to E$ là ánh xạ thỏa mãn $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$. Ánh xạ T được gọi là tựa không giãn nếu $\|Tx - Tx^*\| \leq \|x - x^*\|$ thỏa mãn với mọi $x \in K$ và $x^* \in F(T)$.